3. VIRTUALIŲJŲ POSLINKIŲ PRINCIPAS

3.1. Teorija trumpai

Virtualiaisias poslinkiais vadinami įsivaizduojami, begalo maži mechaninės sistemos kūnų ir taškų poslinkiai, kuriems netrukdo sistemos judėjimą varžantys ryšiai. Darbas, kurį jėga atlieka veikiamo taško virtualiajame poslinkyje, vadinamas virtualiuoju darbu. Mechaninės sistemos ryšiai vadinami idealiais, kai šią sistemą veikiančių reakcijos jėgų darbų suma bet kuriame virtualiame poslinkyje lygi nuliui. Virtualieji poslinkiai skaičiuojami nykstamai mažais dydžiais, todėl materialaus taško virtualusis poslinkis lygus padėties vektoriaus diferencialui $\delta\vec{r}$. Materialaus taško, virtualiuoju poslinkiu galima laikyti apskritimo lanką, kuriuo galimai taškas juda. Taško A virtualiojo poslinkio $\delta\overrightarrow{s_A}$ didumas:

$$\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi, \qquad (3.1)$$

čia

$\delta\varphi$ - kūno OA nykstamai mažas pasisukimo kampas aplink centrą O.

Bet kurio besisukančio taško virtualiojo poslinkio kryptis sutampa su galima jo greičio kryptimi

Materialių taškų sistemos su pastoviais geometriniais idealiais ryšiais statinę pusiausvyrą galima nusakyti virtualiųjų poslinkių principu, kuris teigia, kad tokios mechaninės sistemos statinės pusiausvyros būtina ir pakankama sąlyga yra visų šią sistemą veikiančių aktyviųjų jėgų virtualiųjų darbų sumos lygybė nuliui, bet kuriame šios sistemos kūnų ir taškų virtualiajame poslinkyje. Virtualiųjų poslinkių principo analitinės išraiškos:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0, \qquad (3.2.1)$$

arba

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \left(F_{kx} \cdot \delta x_k + F_{ky} \cdot \delta x_y + F_{kz} \cdot \delta x_z\right) = 0, \qquad (3.2.2)$$

arba

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} F_k \cdot \delta s_k \cdot \cos\alpha_k = 0; \qquad (3.2.3)$$

čia

δA - virtualiųjų darbų suma,

α_k - kampas tarp jėgos vektoriaus ir atitinkamo poslinkio krypčių.

Virtualių poslinkių principas taikomas standžių kūnų sistemų atraminių reakcijų skaičiavimui. Tokiuose uždaviniuose kūnų sistema atlaisvinama nuo vieno ryšio, kurio reakciją norime skaičiuoti. Kūnų sistema įgyja vieną laisvumo laipsnį. Tam, kad tokia sistema išliktų pusiausvyra pridedama ryšio reakcija, kaip aktyvi jėga. Atlaisvinto ryšio veikimo kryptimi taškui suteikiamas įsivaizduojamas virtualusis poslinkis, dėl kurio atitinkamus virtualiuosius poslinkius įgys visi kūnai ir taškai. Taikant virtualiųjų poslinkių principą rašoma virtualiųjų darbų sumos lygtis, o ieškoma reakcija priskiriama prie aktyviųjų sistemą veikiančių jėgų. Gautoje išraiškoje visus virtualiuosius poslinkius išreiškiame per kurį nors vieną poslinkių. Po to gautoje išraiškoje eliminuojame bendrą daugiklį ir surandame reakcijos reikšmę. Šis metodas leidžia iš karto nustatyti bet kurio ryšio norimą reakciją.

Kai kūnas sukasi, virtualusis jėgos darbas skaičiuojamas pagal formulę:

$$\delta A_k = M_k \cdot \delta\varphi_k ,$$

čia

M_k - jėgos momentas sukimosi ašies atžvilgiu.

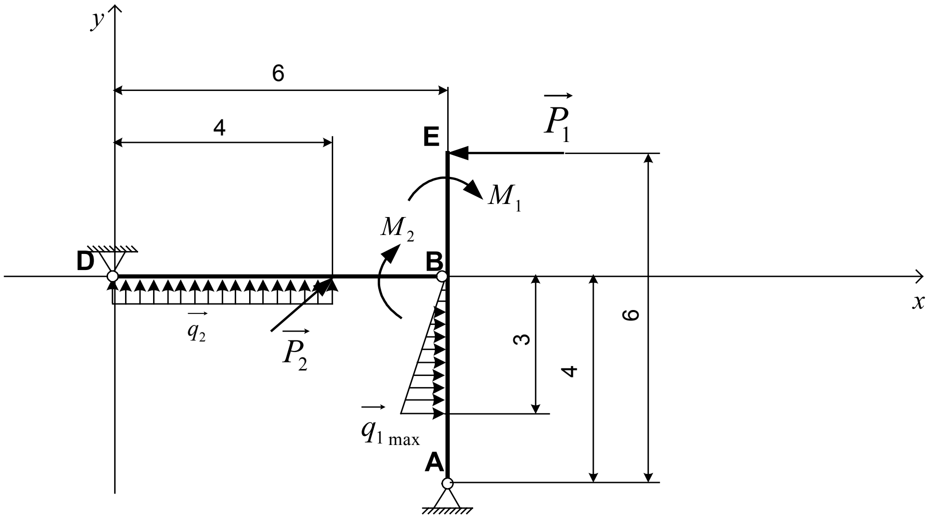
Plokščias kūno judėjimas nagrinėjamas kaip sukimasis jo greičių centro atžvilgiu.

3.2. Virtualiųjų poslinkių principo taikymo pavyzdžiai

3.2.1 Dviejų kūnų sistemos atraminių reakcijų skaičiavimo pavyzdys

Nagrinėjama 3.1pav. parodyta dviejų kūnų sistema. Naudojant virtualiųjų poslinkių principą reikia rasti kūnų sistemos išorines ryšių reakcijas, kai

$$q_{1\max} = 2\,\frac{kN}{m},\ q_2 = 2{,}5\,\frac{kN}{m},\ P_1 = 11{,}5\,kN,\ P_2 = 14{,}5\,kN,\ M_1 = 5\,kN\cdot m,\ M_2 = 6\,kN\cdot m\,.$$



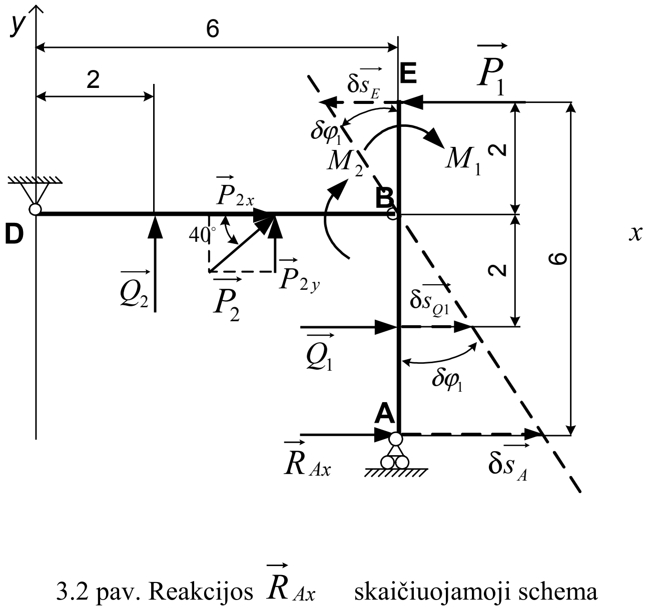
3.1.pav. Kūnų sistemos skaičiuojamoji schema

Paskaičiuojame atstojamąsias išskirstytų apkrovų jėgas:

$$Q_1 = \frac{1}{2}\cdot q_{1\max}\cdot 3 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 = 3\,kN\,;$$

$$Q_2 = q_2\cdot 4 = 2{,}5\cdot 4 = 10\,kN.$$

Skaičiuojame reakciją $\vec{R}_{Ax}$. Atramą A pakeičiame į paslankų šarnyrą, vertinant reakciją $\vec{R}_{Ax}$ (3.2 pav.). Taškų A ir B galimiems poslinkiams statmenos tiesės kertasi taške B (kūnas DB gali suktis ašies, einančios per tašką D, atžvilgiu).



3.2 pav. Reakcijos $\vec{R}_{Ax}$ skaičiuojamoji schema

Išvada:

Taškas B yra kūno AB greičių centras, todėl šis kūnas pasisuks kampu $\delta\varphi$ per tašką B einančios ašies atžvilgiu. Virtualusis poslinkis schemoje parodytas punktyru.

Skaičiuosime momentų centro B atžvilgiu jėgų virtualiuosius darbus:

$$\sum \delta A_k = 0$$

$$P_1 \delta s_E - M_1 \delta\varphi_1 + Q_1 \delta s_{Q1} + R_{Ax} \delta s_A = 0. \quad (3.3)$$

Akivaizdu, kad $\delta s_E = 2\delta\varphi_1, \delta s_{Q1} = 2\delta\varphi_1, \delta s_A = 4\delta\varphi_1$. Tada:

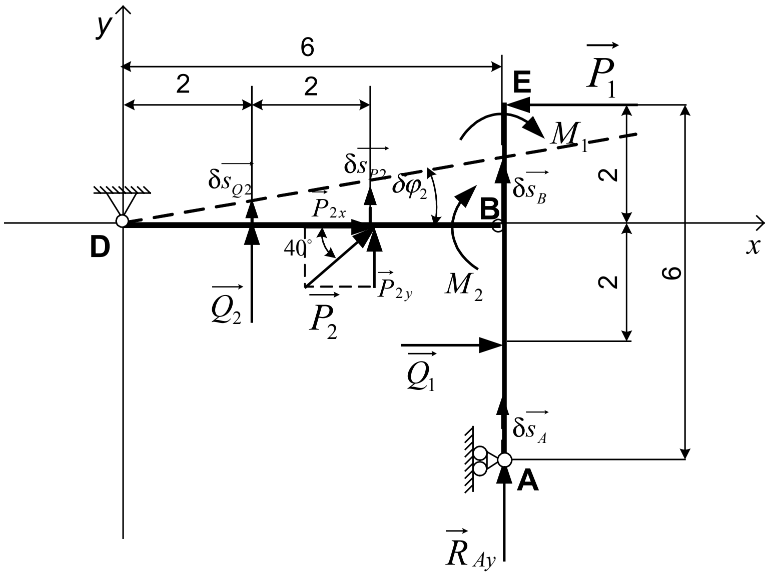
$$2P_1 \delta\varphi_1 - M_1 \delta\varphi_1 + 2Q_1 \delta\varphi_1 + 4R_{Ax} \delta\varphi_1 = 0. \quad (3.4)$$

Iš (3.4) lygties eliminuojame $\delta\varphi_1$ ir gauname:

$$R_{Ax} = \frac{M_1 - 2P_1 - 2Q_1}{4} = \frac{5 - 2 \cdot 11{,}5 - 2 \cdot 3}{4}$$

$$R_{Ax} = -6\,kN.$$

Skaičiuojame reakciją $\vec{R}_{Ay}$.



3.3 pav. Reakcijos $\vec{R}_{Ay}$ skaičiuojamoji schema

Kūnas AB gali slinkti tik vertikalia kryptimi, o tuo metu kūnas BD sukasi atžvilgiu per tašką D einančios ašies. Virtualiųjų darbų lygtis šiame virtualiame poslinkyje būtų tokia:

$$\sum \delta A_k = 0,$$

$$Q_2 \delta s_{Q2} + P_2 \cos 50^0 \delta s_{P2} - M_2 \delta\varphi_2 + R_{Ay} \delta s_A = 0. \quad (3.5)$$

Visus poslinkius išreiškiame per $\delta\varphi_2$. Kūnas AB slenka, todėl:

$\delta s_A = \delta s_B = 6\delta\varphi_2$, $\delta s_{Q2} = 2\delta\varphi_2$, $\delta s_{P2} = 4\delta\varphi_2$. Tada:

$$2Q_2 \delta\varphi_2 + 4P_2 \cos 50^0 \delta\varphi_2 - M_2 \delta\varphi_2 + 6R_{Ay} \delta\varphi_2 = 0. \quad (3.6)$$

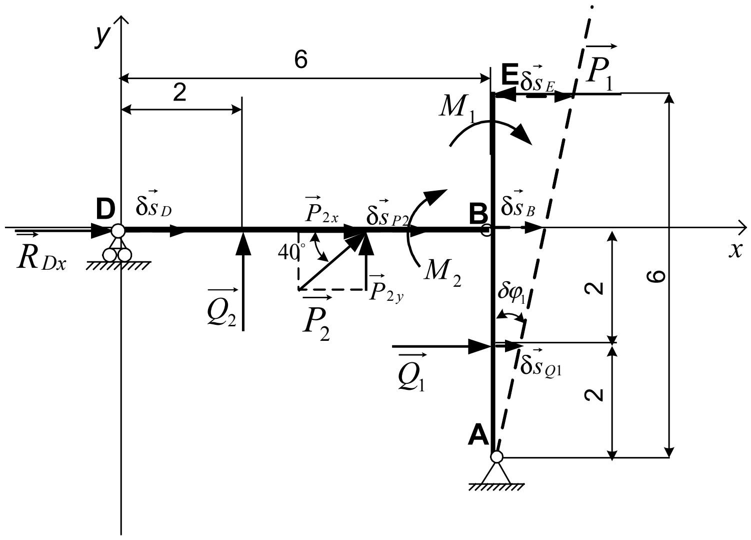
Iš (3.6) lygties eliminuojame $\delta\varphi_2$ ir gauname:

$$R_{Ay} = \frac{M_2 - 2Q_2 - 4P_2 \cos 50^0}{6} = \frac{6 - 2 \cdot 10 - 4 \cdot 14{,}5 \cdot 0{,}643}{6},$$

$R_{Ay} = -8{,}55\,kN$.

Skaičiuojame reakciją $\vec{R}_{Dx}$ (3.4 pav.). Kūnas AB gali pasisukti kampu $\delta\varphi_1$ atžvilgiu ašies, kuri eina per tašką A, o tuo metu kūnas BD slenka horizontalia kryptimi, todėl:

$\delta\vec{s}_D = \delta\vec{s}_B$.



3.4 pav. Reakcijos $\vec{R}_{Dx}$ skaičiuojamoji schema

Virtualiųjų darbų lygtis šiame virtualiajame poslinkyje yra:

$\sum \delta A_k = 0$,

$$R_{Dx}\delta s_D + P_2\cos 40^0\,\delta s_{P2} - P_1\delta s_E + M_1\delta\varphi_1 + Q_1\delta s_{Q1} = 0, \qquad (3.7)$$

$\delta s_B = \delta s_D = \delta s_{P2} = 4\delta\varphi_1$, $\delta s_{Q1} = 2\delta\varphi_1$, $\delta s_E = 6\delta\varphi_1$. Tada:

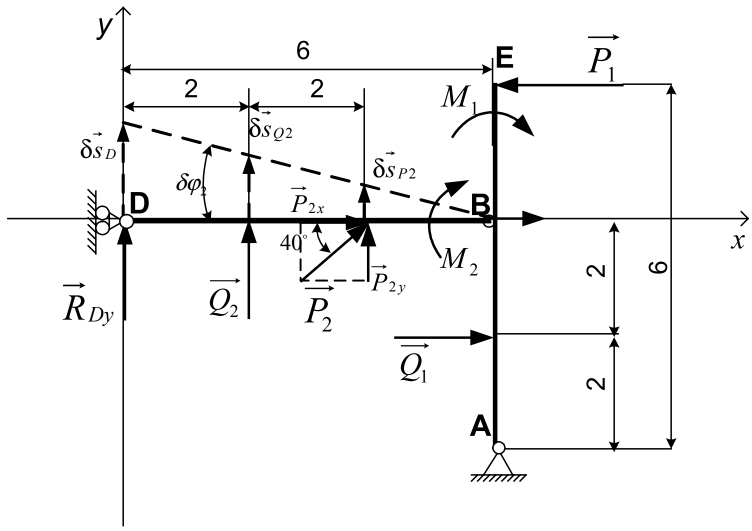
$$4R_{Dx}\delta\varphi_1 + 4P_2\cos 40^0\,\delta\varphi_1 - 6P_1\delta\varphi_1 + M_1\delta\varphi_1 + 2Q_1\delta\varphi_1 = 0. \qquad (3.8)$$

Eliminuojame $\delta\varphi_1$ iš (3.8) lygties ir gauname:

$$R_{Dx} = \frac{6P_1 - 4P_2\cos 40^0 - M_1 - 2Q_1}{4} = \frac{6\cdot 11{,}5 - 4\cdot 14.5\cdot 0.766 - 5 - 2\cdot 3}{4},$$

$R_{Dx} = 3{,}39\,kN$.

Skaičiuojame reakciją $\vec{R}_{Dx}$ (3.5 pav.). Panaikinus horizontalųjį ryšį taške D ir jam suteikus įsivaizduojamą virtualųjį poslinkį, kūnas AB išlieka nejudamas, o BD pasisuka kampu $\delta\varphi_1$.



3.5 pav. Reakcijos $\vec{R}_{Dy}$ skaičiuojamoji schema

Virtualiųjų darbų lygtys:

$\sum \delta A_k = 0$,

$$R_{Dy}\delta s_D + Q_2\delta s_{Q2} + P_2\cos 50^0\,\delta s_{P2} + M_2\delta\varphi_2 = 0\,, \qquad (3.9)$$

$\delta s_D = 6\delta\varphi_2$, $\delta s_{Q2} = 4\delta\varphi_2$, $\delta s_{P2} = 2\delta\varphi_2$. Tada:

$$6R_{Dy}\delta\varphi_2 + 4Q_2\delta\varphi_2 + 2P_2\cos 50^0\,\delta\varphi_2 + M_2\delta\varphi_2 = 0\,. \qquad (3.10)$$

Eliminuojame $\delta\varphi_2$ iš (3.10) lygties ir gauname:

$$R_{Dy} = \frac{-4Q_2 - 2P_2\cos 50^0 - M_2}{6} = \frac{-4\cdot 10 - 2\cdot 14{,}5\cdot 0{,}643 - 6}{6}\,,$$

$$R_{Dy} = -10{,}77kN\,.$$

Skaičiavimo rezultatus galima patikrinti naudojant žinomus statikos metodus.